非線形作用素の軌道と不動点集合への引き込み写像(非線形解析学と凸解析学の研究)

澤島, 侑子

数理解析研究所講究録
第897巻 1995年 26-32

非線形作用素の軌道と不動点集合への引き込み写像

お茶大理　澤島侑子 (Ikuko Sawashima)

Banach 空間上の非線形作用素に対する双対の方法について、数理経済の国際学会や関数空間の研究集会などで報告したが [1] [2]、今回はその方法を Lipschitz 連続な作用素の軌道の研究に応用する。　先ず、双対作用素を用いずに容易に得られる次の命題を示す。

命題　E が回帰的な Banach 空間とする。E 上の作用素 T は次の条件を満たす；

(i)　T は弱位相に関して連続、

(ii)　$\sup \|T^n x\| < \infty$　　$(x \in E)$

(iii)　$T^n x - T^{n+1} x \underset{w}{\to} 0$　　$(x \in E)$

このとき、次が成り立つ；

(1)　$\bigcup_{x \in E} Cl\{T^n x\} = F(T)$

(2)　E から T の不動点集合 $F(T)$ 上への写像 S が存在して、

$$ST = TS = S = S^2$$

$$Sx \in Cl\{T^n x\} \qquad (x \in E)$$

となる。

(3)　$T^n x \underset{w}{\to} 0$ $(x \in E)$ と $F(T) = \{0\}$ は同値である。

ただし、$Cl\{T^n x\} = \bigcap_m [\{T^n x; n \geq m\}$ の弱閉包] で $F(T)$ は T の不動点全体を表す。

証明にはいる前に、この報告で用いる点列のフィルター極限について説明する。$\mathbf{N}$ を自然数全体とする。$\mathbf{N}$ の部分集合族 $\mathcal{F}$ が $\mathbf{N}$ のフィルターであるとは、$\mathcal{F}$ が性質；$\phi \notin \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \ni A, B$, ならば $A \cap B \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \ni A, B \supset A$ ならば $B \in \mathcal{F}$ を持つことである。フィルター $\mathcal{F}$ がウルトラフィルター であるとは、$\mathcal{F}$ が極大フィルターで、すべての m について $\mathcal{F} \ni \{n; n \geq m\}$ となることである。S を Hausdorff 位相 τ を備えた位相空間と

する。Sの点列 $\{s_n\}$ について, $\mathcal{F}$がウルトラフィルターであるとき、$\cap_{F\in\mathcal{F}}[\{s_n; n \in F\}$ の τ-閉包] は空集合またはただ1点よりなる集合である。もし、これがただ1点集合であるとき、この点を $\mathcal{F}$による $\{s_n\}$ の フィルター極限といい、τ-$\mathcal{F}$-$\lim s_n$ とかく。すなわち、

$$\tau\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim s_n = \bigcap_{F\in\mathcal{F}}[\{s_n; n \in F\} \text{ の } \tau\text{-閉包}]$$

である。$\bigcap_m[\{s_n; n \geq m\}$ の τ-閉包] を s_n の τ-クラスター集合といい、τ-$Cl\{s_n\}$ と表す。フィルター極限や クラスター集合は位相に関係して定まるが、τ-位相によることが明らかなときは、τ-を省略する。あきらかに、τ-$\mathcal{F}$-$\lim s_n \in \tau$-$Cl\{s_n\}$ である。フィルター極限について必要な性質を次にまとめておく。τ は省略する(「5」は除く)。

「1」 $\mathcal{F}$-$\lim s_n = s$ であるための必要十分な条件は任意の近傍 $U(s)$ に対して、$\{n; s_n \in U(s)\}$ が $\mathcal{F}$ に属することである。

「2」 $\lim s_n$ が存在することと、すべての ウルトラフィルター $\mathcal{F}$に対して $\lim s_n = \mathcal{F}$-$\lim s_n$ となることとは同値である。

「3」 $\{s_n\}$ が コンパクト集合 K に含まれるならば、任意の ウルトラフィルター $\mathcal{F}$ に対して $\mathcal{F}$-$\lim s_n$ が存在する

「4」 $Cl\{s_n\} = \{\mathcal{F}\text{-}\lim s_n$; ウルトラフィルター $\mathcal{F}\}$

「5」 S' を Hasdorff 空間 (位相 τ') とし、ψ を S から S' への連続な写像とする。このとき、

$$\psi(\tau\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim s_n) = \tau'\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim \psi(s_n)$$

「6」 S が線形構造を持つとき、フィルター極限もその線形性を保存し、S が束 (lattice) 構造を持つとき、フィルター極限もその束演算を保存する。ただし、Banach 極限が持つ 'ずらし' についての不変性は持たない。

証明 条件 (ii) より $\sup \|T^n x\| = M < \infty$ とおけば、$\{T^n x\}$ は 0 を中心とする半径 M の閉球 B_M に含まれる。E の回帰性により B_Mは弱コンパクトである。従って$\mathbf{N}$ の任意の ウルトラフィルター $\mathcal{F}$ に対して、w-$\mathcal{F}$-$\lim T^n x$ $(x \in E)$ が存在する。このフィ

ルター極限を x に対して Sx と定める。ただちに $Sx \in w\text{-}Cl\{T^n x\}$ を得る。Tの弱連続性により、$TSx = w\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^{n+1}x = STx$ となり、条件 (iii) により、

$$w\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^{n+1}x = w\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^n x = Sx$$

となる。よって、

$$STx = TSx = Sx = S^2 x$$

である。また、$F(T) \ni y$ ならば $Ty = y$ で、従って $Sy = y$ となる。すなわち, S は E から $F(T)$ 上への写像である。上記 フィルター極限の性質によって、(1) 及び (3) も明かである。よって、この命題が証明された。

次に、Banach 空間の回帰性を仮定しない場合を考える。非線形作用素に対する双対の方法を用いるために、非線形作用素に対する双対空間等を簡単に説明する。

Banach 空間 E の通常の双対空間を $E^\star$で表す。$L(E)$ を E 上の Lipschitz 連続、かつ、0 で 0 をとる作用素の全体とする。$L(E)$ に属する作用素を扱う場合の双対空間として E 上の Lipschitz 連続, 0 で 0 をとる汎関数の全体を $E^\sharp$ とする。$x^\sharp \in E^\sharp$ のノルム $\|x^\sharp\|_L$を $x^\sharp$ の Lipschtz 係数によって定める。すなわち；

$$\|x^\sharp\|_L = \inf\{c\,;|\,|\,x^\sharp(x) - x^\sharp(y)| \le c\,\|\,x - y\| \quad x, y \in E\}$$

同様に $L(E) \in T$ に対して、ノルム $\|T\|_L$ を T の Lipschitz 係数によって定める。$E^\sharp$ は $E^\star$ を閉部分空間に持つ Banach 空間となり、$E^\sharp$ の閉球は $\sigma(E^\sharp, E)$-位相に関してコンパクトとなる。この $E^\sharp$ を便宜的に Lipschitz 双対空間と呼ぶ。$L(E) \in T$ に対して、T の双対作用素 $T^\sharp$ を

$$T^\sharp x^\sharp(x) = x^\sharp(Tx) \qquad (x \in E,\ x^\sharp \in E^\sharp)$$

と定義する。$T^\sharp$は $E^\sharp$上の有界線形作用素となる。$E^{\sharp\star}$は Banach 空間 $E^\sharp$の通常の双対空間を、$T^{\sharp\star}$は $T^\sharp$ の通常の双対作用素を表す。また Q を E から $E^{\sharp\star}$への埋め込み写像、すなわち、$x \in E$ に対して

$$Qx(x^\sharp) = x^\sharp(x) \qquad (x^\sharp \in E^\sharp)$$

とする。詳細は [1], [2] 参照。

定理　T は Banach 空間 E 上の Lipschitz 連続、かつ $T0 = 0$ となる作用素で、つぎの条件 (i) と (ii) をみたすとする；

(i) $\sup \|T^n\|_L < \infty$

(ii) $\mathbf{N}$ のあるウルトラフィルタ- $\mathcal{F}$ について

$$w\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim(T^n x - T^{n+1}x) = 0 \qquad (x \in E)$$

このとき、

(1)　$\mathcal{F}$ に対して、次の性質を持つ $E^{\sharp\star}$ 上の有界線形作用素 $P^\star$ が定義できる；

(a) $P^\star Qx(x^\star) = T^{\sharp\star}P^\star Qx(x^\star) = P^{\star 2}Qx(x^\star) \qquad (x \in E,\ x^\star \in E^\star)$

(b) $T^{\sharp\star}P^\star = P^\star T^{\sharp\star}$

(c) $P^\star Qx = \sigma(E^{\sharp\star}, E^\sharp)\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp\star n}Qx$

$\in \bigcap_m [\{T^{\sharp\star n}Qx; n \geq m\}$ の $\sigma(E^{\sharp\star}, E^\sharp)$-閉包$] \qquad (x \in E)$

(2)　$A = \{x; P^\star Qx \in QE\}$ とすると、A の元 x に対して $P^\star Qx = QSx$ によって A 上の作用素 S が定義され、S は A から T の不動点集合 $F(T)$ 上への Lipschitz 連続な引き込み写像となる。すなわち、

(d) S の値域 $= F(T)$

(e) $TS = S = S^2$

さらに

(f) A は T-不変で、$TS = ST_{|A}$

(g) $Sx \in \|\ \ \| - Cl\{T^n x\} \qquad (x \in A)$

が成り立つ。

証明　Lipschitz 双対空間 $E^\sharp$ には局所凸位相 $\sigma(E^\sharp, E)$ が考えられる。この位相を簡単に $w^\sharp$ で表す。仮定 (i) と双対作用素の性質 $(T^n)^\sharp = T^{\sharp n}, \|T^n\|_L = \|T^{\sharp n}\|$ とによって、$M = \sup \|T^n\|_L$ とおけば $\|T^{\sharp n}x^\sharp\|_L \leq M\|x^\sharp\|_L$ すなわち、$x^\sharp$の $T^\sharp$ による軌道 $T^{\sharp n}x^\sharp$ は半

径 $M\|x^\sharp\|_L$ の閉球の中にある。条件 (ii) におけるウルトラフィルター $\mathcal{F}$ を固定する。$E^\sharp$ の閉球の $w^\sharp$-コンパクト性により

$$P^\sharp x^\sharp = w^\sharp\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp n}x^\sharp \qquad (x^\sharp \in E^\sharp)$$

が定義できる。明らかに、$\|Px^\sharp\|_L \leq M\|x^\sharp\|_L$ で、$T^\sharp$ の線形性により P も $E^\sharp$ 上の有界線形作用素となる。$T^\sharp$ の $w^\sharp$-連続性とフィルター極限の性質とにより

$$T^\sharp Px^\sharp(x) = \mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp n+1}x^\sharp(x) = PT^\sharp x^\sharp(x) \qquad (x \in E,\ x^\sharp \in E^\sharp)$$

が成り立つ。また、仮定 (ii) により、

$$\begin{aligned} T^\sharp Px^\star(x) &= \mathcal{F}\text{-}\lim\{T^{\sharp n+1}x^\star(x)\} \\ &= \mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp n}x^\star(x) - \mathcal{F}\text{-}\lim\{T^{\sharp n}x^\star(x) - T^{\sharp n+1}x^\star(x)\} \\ &= \mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp n}x^\star(x) - \mathcal{F}\text{-}\lim\{x^\star(T^n x - T^{n+1}x)\} \\ &= Px^\star(x) \qquad (x \in E,\ x^\star \in E^\star) \end{aligned}$$

よって、$T^\sharp Px^\star = Px^\star$ となり、このことから

$$P^{\star 2}x^\star = w^\sharp\text{-}\lim T^{\sharp n}Px^\star = Px^\star \qquad (x^\star \in E^\star)$$

も直ちに得られる。従って、この $E^\sharp$上の有界線形作用素 P の通常の双対作用素を $P^\star$とすれば 結論の、(1) の (a), (b) は明かである。(c) を示そう。Qx は $E^\sharp$上の $w^\sharp$-連続な汎関数であるから、

$$\begin{aligned} P^\star Qx(x^\sharp) &= Qx(Px^\sharp) = Qx(w^\sharp - \mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp n}x^\sharp) \\ &= \mathcal{F}\text{-}\lim Qx(T^{\sharp n}x^\sharp) = \mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp\star n}Qx(x^\sharp) \\ &= \{\sigma(E^{\sharp\star}, E^\sharp) - \mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp\star n}Qx(x^\sharp) \end{aligned}$$

がすべての $x \in E$ と $x^\sharp \in E^\sharp$ について成り立つ。 よって、「4」より

$$P^\star Qx \in \textstyle\bigcap_m[\{T^{\sharp\star n}Qx; n \geq m\} \text{ の } \sigma(E^{\sharp\star}, E^\sharp)\text{-閉包}] \qquad (x \in E)$$

が成り立つ。以上で (1) が証明された。

$A \ni x$ とする。(1) の (a) より、

$$\begin{aligned} x^\star(Sx) &= QSx(x^\star) = P^\star Qx(x^\star) = T^{\sharp\star}P^\star Qx(x^\star) \\ &= T^{\sharp\star}QSx(x^\star) = QSx(T^\sharp x^\star) = x^\star(TSx) \qquad (x^\star \in E^\star) \end{aligned}$$

よって $S=TS$ かつ、$Sx\in F(T)$。また、(1) の (b) より

$$P^\star QTx = P^\star T^{\sharp\star}Qx = T^{\sharp\star}P^\star Qx = T^{\sharp\star}QSx = QTSx$$

となり、$Tx\in A$ で $TS=ST_{|A}$ が得られた。次に、$y\in F(T)$ ならば、$T^{\sharp\star}Qy=QTy=Qy$ となり、従って、(c) より $P^\star Qy=Qy$ を得る。よって、$Sy=y$ で S は $F(T)$ 上への写像となり、同時に、$x\in A$ に対して $SSx=Sx$ も得られ、(d), (e), (f) が証明された。

(g) を示すために再び (c) を用いる。$A\ni x$ とする。

$$QSx=\sigma(E^{\sharp\star},E^\sharp)\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp\star n}Qx$$

である。いま、特に $\psi(y)=\|y-Sx\|-\|Sx\|$ とすれば、$\psi\in E^\sharp$ となるので、

$$\begin{aligned}-\|Sx\| = QSx(\psi) &= \mathcal{F}\text{-}\lim T^{\sharp\star n}Qx(\psi) = \mathcal{F}\text{-}\lim\psi(T^nx)\\ &= \mathcal{F}\text{-}\lim(\|T^nx-Sx\|-\|Sx\|)\\ &= \mathcal{F}\text{-}\lim\|T^nx-Sx\|-\|Sx\|\end{aligned}$$

よって、　$\mathcal{F}\text{-}\lim\|T^nx-Sx\|=0$

すなわち、　$Sx=\|\ \ \|\text{-}\mathcal{F}\text{-}\lim T^nx$

となり、「4」より $Sx\in\|\ \ \|-Cl\{T^nx\}$ が得られ、定理の証明が完了する。

系　定理に於いて、条件 (ii) を強め、

(ii)′　**N** のあるウルトラフィルター $\mathcal{F}$ に対して

$$\mathcal{F}\text{-}\lim\{x^\sharp(T^nx)-x^\sharp(T^{n+1}x)\}=0 \qquad (x\in E,\ x^\sharp\in E^\sharp)$$

を仮定すれば、$P^\star$ は性質

$$T^{\sharp\star}P^\star = P^\star T^{\sharp\star} = P^\star = P^{\star 2}$$

を持ち、すなわち、$E^{\sharp\star}$ から $F(T^{\sharp\star})$ 上への引き込み写像となる。

参考文献

[1] I.Sawashima; *Methods of Duals in Nonlinear Analysis,* Nonlinear and Convex Analysis in Economic Theorey, Lecture note in Economics and Mathematical systems,

Springer, vol. **419**(1995), 247-259.

[2] I.Sawashima; *Ergodicity of Lipscchitz dual operator*, 第２回関数空間セミナー報告集, (1994), 72-78.